

Ivan Slapničar

Matematika 2

PODSJETNIK ZA UČENJE

<http://www.fesb.unist.hr/mat2>

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
SPLIT, 2018.

Sadržaj

1	Neodređeni integral	3
2	Određeni integral	5
3	Funkcije više varijabla	7
4	Višestruki integrali	8
5	Diferencijalne jednačbe	9
6	Metoda najmanjih kvadrata	10

1 Neodređeni integral

1. Definirajte primitivnu funkciju i neodređeni integral. Navedite primjer. Dokažite da se primitivne funkcije razlikuju do na konstantu.

2. Dokažite svojstva neodređenog integrala:

a) linearnost,

b) $(\int f(x)dx)' = f(x)$,

c) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$,

d) $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. Kako glasi tablica osnovnih integrala?

4. Opišite metode integriranja i dajte primjere:

a) metode supstitucije:

i. ako je $x = \phi(t)$, i ϕ bijekcija, tada je

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt,$$

ii. ako je $I = \int f(x)dx$ oblika

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(x))\phi'(x)dx,$$

tada uz supstituciju $\phi(x) = t$ imamo $I = \int f(t)dt$,

b) parcijalna integracija (dokažite formulu):

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du;$$

c) rekurzivne formule: izvedite, na primjer, formulu

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1},$$

d) integriranje racionalnih funkcija: eliminacija zajedničkih nul-točaka brojnika i nazivnika, svodenje na pravu racionalnu funkciju, rastavljanje na parcijalne razlomke, rješavanje tri osnovna tipa integrala,

e) integriranje trigonometrijskih funkcija: izvedite univerzalnu trigonometrijsku supstituciju:

$$\begin{aligned}t &= \tan \frac{x}{2}, \\x &= 2 \arctan t, \\dx &= \frac{2}{1+t^2} dt, \\\sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, \\\cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\\tan x &= \frac{2t}{1-t^2}.\end{aligned}$$

Za koje x vrijede gornje formule? Primjer. Izvedite supstituciju $t = \tan x$.

f) integriranje hiperbolnih funkcija,

g) integriranje iracionalnih funkcija:

i. integral

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx$$

se rješava pomoću supstitucije

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

pri čemu je n najmanji zajednički nazivnik od n_1, \dots, n_k ,

ii. integral

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

se rješava pomoću supstitucije

$$\frac{2ax+b}{\sqrt{|4ac-b^2|}} = t$$

nakon čega dobijemo jedan od tri slučaja

$$\begin{aligned}\int R(t, \sqrt{1-t^2}) dt &= \{t = \sin z \text{ ili } \sqrt{1-t^2} = z(1-t)\} = \dots \\ \int R(t, \sqrt{t^2-1}) dt &= \{t = \frac{1}{\sin z} \text{ ili } \sqrt{t^2-1} = t+z\} = \dots \\ \int R(t, \sqrt{t^2+1}) dt &= \{t = \tan z \text{ ili } \sqrt{t^2+1} = t+z\} = \dots\end{aligned}$$

iii. metoda neodređenih koeficijenata,

h) binomni integral:

$$\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p dx &= (m, n, p \in \mathbb{Q}) = \{x^n = t\} \\ &= \frac{1}{n} \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{\frac{m+1}{n}+p-1} dt = \dots\end{aligned}$$

5. Kako se provodi i čemu služi postupak integriranja pomoću razvoja u red?

2 Određeni integral

1. Definirajte određeni (Riemannov) integral.
2. Objasnite osnovna svojstva određenog integrala:

a) ako je $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$, tada

$$\int_a^b f(x) dx$$

daje površinu između $f(x)$ i x -osi od a do b ,

b) vrijedi

$$\int_a^a f(x) dx = 0,$$

c) vrijedi

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

d) vrijedi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

3. Što je određeni, a što neodređeni integral?
4. Dokažite Newton-Leibnitzovu formulu.
5. Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$, tada je jedna primitivna funkcija dana s

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx, \quad x \in [a, b], \quad F(a) = 0.$$

Dokažite!

6. Dokažite teorem srednje vrijednosti za određeni integral: ako je f neprekidna na $[a, b]$, onda postoji $c \in [a, b]$ za koji je

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Koja je grafička interpretacija tog teorema?

7. Dokažite

a) monotonost:

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx,$$

b) nejednakost trokuta:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

8. Što je nepravi integral? Dokažite:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} = 1,$$
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{za } \alpha > 0, \\ \text{divergira}, & \text{za } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

9. Opišite kriterije konvergencije za nepravi integral (majoranta, minoranta, apsolutna konvergencija).
10. Kako računamo površinu ravninskih likova? Izvedite element površine dP u Kartezijevim koordinatama,

$$dP = dx dy,$$

i polarnim koordinatama,

$$dP = \frac{1}{2} r^2 d\phi.$$

Izvedite dP za parametarski zadane krivulje. Dajte primjere.

11. Kako računamo duljinu luka ravninske krivulje? Izvedite ds u Kartezijevim koordinatama,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

i polarnim koordinatama,

$$ds = \sqrt{r'^2 + r^2} d\phi.$$

Izvedite ds za parametarski zadane krivulje. Dajte primjere.

12. Slično pitanje za obujam rotacionih tijela.
13. Slično pitanje za oplošje rotacionih ploha (komplanacija).
14. Objasnite postupak numeričkog integriranja (trapezna formula, Simpsonova formula, Richardsonova ekstrapolacija)?

3 Funkcije više varijabla

1. Definirajte n -dimenzionalni prostor \mathbb{R}^n . Na koje sve načine možemo zadati funkciju $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$? Što su nivo-plohe?
2. Kako definiramo udaljenost? Što je otvorena kugla $K(T, \delta)$?
3. Definicija limesa funkcije više varijabli:

$$\lim_{T \rightarrow T_0} F(T) = a$$

ako

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0)$$

tako da

$$T \in K(T_0, \delta) \Rightarrow |f(T) - a| < \varepsilon.$$

Kako možemo limes definirati pomoću nizova?

4. Definirajte neprekidnost funkcije više varijabla.
5. Neprekidna funkcija poprima na zatvorenom skupu svoj maksimum i minimum.
6. Navedite formule za standardne plohe drugog reda (kugla, elipsoid, stožac, razni paraboloidi, razni cilindri).
7. Definicija parcijalnih derivacija.
8. Schwartzov teorem.
9. Definicija totalnog diferencijala.

10. Je li svaka neprekidno derivabilna funkcija i diferencijabilna?
11. Definirajte tangencijalnu ravninu i normalu na plohu.
12. Parcijalno deriviranje složene funkcije (kompozicije funkcija).
13. Totalni diferencijal višeg reda.
14. Taylorova formula za funkcije više varijabla:

$$f(T) = f(T_0) + \sum_{r=1}^m \frac{d^r(f(T_0))}{r!} + \frac{d^{(m+1)}(f(T_\nu))}{p \cdot m!} (1 - \nu)^{m+1-p}$$

Razvijte funkciju e^{x+y} u Taylorov red u okolini točke $(1, -1)$.

15. Kako definiramo lokalne ekstreme funkcije više varijabla?
16. Kako glasi nuždan uvjet ekstrema funkcije više varijabla?
17. Kako glasi dovoljan uvjet ekstrema pomoću totalnog diferencijala?
18. Kako glasi dovoljan uvjet ekstrema pomoću pod-determinanti matrice drugih parcijalnih derivacija? Dajte primjere.
19. Što su implicitno zadane funkcije? Izrecite Teorem o implicitnoj funkciji i navedite primjere.
20. Izvedite nužne uvjete za uvjetni ekstrem funkcije dvije varijable. Dajte primjere.

4 Višestruki integrali

1. Kako definiramo višestruki integral?
2. Svojstva: linearnost, homogenost, integral ne ovisi o redoslijedu integracije.
3. Primjene dvostrukog integrala: obujam, površina ako je $f(x, y) = 1$.
4. Prebacivanje dvostrukog integrala iz Kartezijevih u polarne koordinate. Primjer.
5. Kako definiramo neprave integrale? Primjer nepravog dvostrukog integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

6. Kako definiramo trostruku integral kada je područje integracije kvadar, a kako kada je područje integracije omeđeno plohami? Navedite primjene trostrukog integrala.
7. Opišite postupak prebacivanja trostrukog integrala iz Kartezijevih u cilindrične i sferne koordinate. Dajte primjere.
8. Kako glase općenite formule za zamjenu varijabla kod višesestrukih integrala? Navedite primjere.
9. Kako se računaju momenti i težišta dvodimenzionalnih ploha i trodimenzionalnih tijela?
10. Izvedite postupke deriviranja integrala ovisnih o parametru. Navedite primjene tih postupaka i dajte primjere.
11. Kako gasi problem varijacijskog računa?
12. Izvedite nužne i dovoljne uvjete rješenja problema varijacijskog računa.
13. Izvedite rješenje problema najkraćeg puta i problema najkraćeg vremena (brachistohrone).
14. Izvedite Eulerovu metodu konačnih razlika za rješavanje problema rubnih vrijednosti. Dajte primjer.

5 Diferencijalne jednačbe

1. Što je diferencijalna jednačba i što je njeno rješenje? Što je problem rubnih vrijednosti? Što je problem početnih vrijednosti?
2. Kako glase populacijska i logistička jednačba te kako se pomoću njih modelira rast ili pad populacije? Dajte primjere.
3. Kako definiramo jednačbe sa separiranim varijablama i koji je postupak rješavanja?
4. Što je stupanj homogenosti diferencijalne jednačbe prvog reda? Kako se homogene jednačbe svode na jednačbe sa separiranim varijablama?
5. Kako glasi Newtonov zakon hlađenja? Dajte primjer.
6. Što je polje smjerova diferencijalne jednačbe prvog reda?
7. Izvedite Eulerovu metodu.
8. Što su ortogonalne i izogonalne trajektorije i kako ih računamo? Dajte primjer.

9. Što su singularna rješenja i ovojnice i kako ih nalazimo? Dajte primjer.
10. Kada je diferencijalna jednačba egzaktna? Što je integrirajući faktor i kako ga računamo? Dajte primjer.
11. Kako glasi linearna diferencijalna jednačba prvog reda? Izvedite formulu za rješenje takvih jednačbi. Dajte primjer.
12. Kako glasi linearna diferencijalna jednačba drugog reda? Kako izgleda struktura općeg rješenja takve jednačbe?
13. Kako definiramo linearnu nezavisnost dvaju funkcija? Što je determinanta Wronskog i čemu služi?
14. Opišite strukturu rješenja homogene linearne diferencijalne jednačbe drugog reda.
15. Objasnite metodu varijacije konstanti za rješavanje nehomogene linearne diferencijalne jednačbe drugog reda. Dajte primjer.
16. Opišite potupak rješavanja linearne diferencijalne jednačbe drugog reda s konstantnim koeficijentima. Dajte primjer.
17. Što su to slobodna, gušena i prisilna titranja? U kojem slučaju se može javiti rezonancija?
18. Kako glasi linearna diferencijalna jednačba n -tog reda? Kako izgleda struktura rješenja takve jednačbe?
19. Kako definiramo linearnu nezavisnost n funkcija i kako u tom slučaju koristimo determinantu Wronskog?
20. Objasnite metodu varijacije konstanti za rješavanje nehomogene linearne diferencijalne jednačbe n -tog reda. Dajte primjer.
21. Opišite potupak rješavanja linearne diferencijalne jednačbe n -tog reda s konstantnim koeficijentima. Dajte primjer.
22. Kakav sustav opisuju Lhotka-Volterra-ine jednačbe. Kako se rješava takav sustav? Dajte primjer.

6 Metoda najmanjih kvadrata

1. Kako glasi problem najmanjih kvadrata?
2. Što je linearna regresija? Dajte primjer.

3. Izvedite metodu normalnih jednažbi za rješavanje problema najmanjih kvadrata. Dajte primjer.
4. Opišite QR rastav matrice i navedite osnovna svojstva matrica Q i R .
5. Kako računamo QR rastav vektora pomoću Householderovog reflektora?
6. Kako računamo QR rastav matrice pomoću Householderovih reflektora? Opišite numerički postupak.
7. Opišite postupak rješavanja problema najmanjih kvadrata pomoću QR rastava.
8. Što je ekonomični QR rastav? Što je QR rastav s pivotiranjem?